数学Ⅱ・B

吉備システム

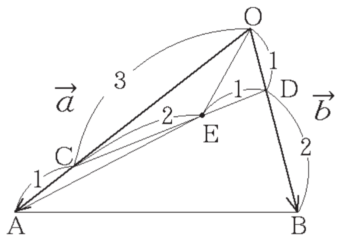
1

[07-01-01-05-0001]

(1) $\dfrac{3}{4}\vec{a}$　(2) $-\vec{a}+\vec{b}$　(3) $-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$　(4) $\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$　(5) $-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$

[解説]

(1) $\overrightarrow{OC}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}=\dfrac{3}{4}\vec{a}$



(2) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OB}-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{3}{4}\vec{a}$

$=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$

(4) $\overrightarrow{OE}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{OC}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{CD}=\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}\right)=\dfrac{3}{4}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$

(5) $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}-\vec{a}=-\dfrac{3}{4}\vec{a}+\dfrac{2}{9}\vec{b}$

2

[07-01-02-04-0001]

$(-5,\ 0)$，$(3,\ -4)$

[解説]　$\vec{a}=(x,\ y)$　とおくと，$\vec{a}+t\vec{b}=(x,\ y)+t(1,\ 2)=(x+t,\ y+2t)$

$|\vec{a}+t\vec{b}|=\sqrt{(x+t)^2+(y+2t)^2}$　だから，$f(t)=(x+t)^2+(y+2t)^2$　とおくと，

$f(t)=5t^2+2(x+2y)t+x^2+y^2$

$=5\left\{t^2+\dfrac{2(x+2y)}{5}t+\left(\dfrac{x+2y}{5}\right)^2-\left(\dfrac{x+2y}{5}\right)^2\right\}+x^2+y^2$

$=5\left(t+\dfrac{x+2y}{5}\right)^2+\dfrac{(2x-y)^2}{5}$　　また，$f(t)$は　$t=1$　のとき，最小値　$(2\sqrt{5})^2=20$　をとる。

よって，$\dfrac{x+2y}{5}=-1$，$x=-2y-5$　……①　　$\dfrac{(2x-y)^2}{5}=20$，$(2x-y)^2=100$　……②

①を②に代入すると，$\{2(-2y-5)-y\}^2=100$，$(-5y-10)^2=100$，$-5y-10=\pm10$，

$-5y=\pm10+10$　より，$y=0,\ -4$　　$y=0$　のとき，$x=-5$　　$y=-4$　のとき，$x=3$

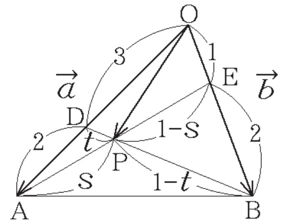
したがって，$\vec{a}=(-5,\ 0)$，$(3,\ -4)$

数学Ⅱ・B

吉備システム

[07-01-04-05-0001]

3 $\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$



［解説］　△OAEにおいて，AP：PE＝s：1－s　とすると，

$\overrightarrow{OP}=(1-s)\vec{a}+\dfrac{1}{3}s\vec{b}$　……①　　△OBDにおいて，

DP：PB＝t：1－t　とすると，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{3}{5}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$　……②

よって，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$　かつ　2つのベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$は平行でないから，①，②の係数を比較して，

$1-s=\dfrac{3}{5}(1-t)$　……③，　$\dfrac{1}{3}s=t$　……④　　③，④を解いて，$s=\dfrac{1}{2}$，　$t=\dfrac{1}{6}$

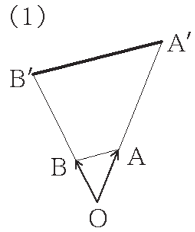
したがって，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

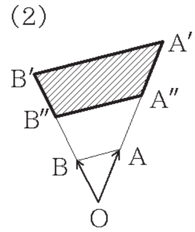
［別解］　メネラウスの定理より，△OAEと直線DPBにおいて，$\dfrac{OD}{DA}\cdot\dfrac{AP}{PE}\cdot\dfrac{EB}{BO}=1$，　$\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{AP}{PE}\cdot\dfrac{2}{3}=1$，

$\dfrac{AP}{PE}=1$　　よって，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}{2}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}$

[07-01-05-05-0001]

4 (1)　右の図　　(2)　右の図





［解説］　ベクトルの終点Pの存在範囲は，実数s，tとすると次のような関係が成り立つ。

線分AB上にある　⇔　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$，

$s+t=1$，$s\geqq0$，　$t\geqq0$

(1)　$s+t=3$　より，$\dfrac{s}{3}+\dfrac{t}{3}=1$

よって，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{s}{3}\cdot3\overrightarrow{OA}+\dfrac{t}{3}\cdot3\overrightarrow{OB}$　　$\dfrac{s}{3}=s'$，　$\dfrac{t}{3}=t'$，$3\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA'}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB'}$　と

すると，$\overrightarrow{OP}=s'\overrightarrow{OA'}+t'\overrightarrow{OB'}$　　$s'+t'=1$，$s'\geqq0$，　$t'\geqq0$　　したがって，線分A′B′

(2)　$s+t=2$，$s\geqq0$，　$t\geqq0$　のとき，(1)と同様にして，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA''}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB''}$　とすると，点Pは線分A″B″上にある。また，(1)より，$s+t=3$，$s\geqq0$，　$t\geqq0$　のとき，点Pは線分A′B′上にある。
よって，台形A′A″B″B′の内部および周上

数学Ⅱ・B

吉備システム

［07-01-05-09-0001］

5

(1)　Aを中心とする半径2の円　(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を3：1の比に外分する点A′ を中心とする半径1の円

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を1：2の比に内分する点をA′，点BのOに対する対称点をB′ とすると，線分A′ B′ を直径とする円

［解説］　点C$(\vec{c})$を中心とする半径rの円Cのベクトル方程式は，円上の任意の点P$(\vec{p})$とすると，$|\vec{p}-\vec{c}|=r$

また，異なる2点A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$において，線分ABを直径とするとき，円Cのベクトル方程式は，

$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$

(2)　$\left|2\left(\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{a}\right)\right|=2$，$\left|\vec{p}-\frac{3}{2}\vec{a}\right|=1$　より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を3：1の比に外分する点A′ を中心とする半径1の円

(3)　$3\left(\vec{p}-\frac{1}{3}\vec{a}\right)\cdot\{\vec{p}-(-\vec{b})\}=0$　より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を1：2の比に内分する点をA′，点BのOに対する対称点をB′ とすると，線分A′ B′ を直径とする円